<table>
<tr><th>Название и суть метода</th><th>Примеры</th></tr>
<tr><td>

1) Замена переменной.

Этим методом решаются триг. уравнения с одинаковой триг. функцией одного и того же аргумента.

Триг. функцию обозначаем за новую переменную и решаем обычное алгебраическое уравнение (чаще всего квадратное).

ВАЖНО! Когда вспомогательная переменная заменяет функции sin или cos, не забываем, что это функции ограниченные: **$t \in [-1;1]$**

(3а) Особый случай замены в уравнениях

с $\sin 2x$ и $\sin x \pm \cos x$: $t = \sin x \pm \cos x$, $|t| \le \sqrt{2}$

$t^2 = \sin^2 x + \cos^2 x \pm 2\sin x \cos x = 1 \pm \sin 2x \Rightarrow$

выразить $\sin 2x$ через t и подставить в ур-е. Решить ур-е с переменной t, выполнить обратную замену.

</td><td>

$8\sin^2 3x + \cos 3x + 1 = 0$

$8\cdot(1-\cos^2 3x) + \cos 3x + 1 = 0$

$8\cos^2 3x - \cos 3x - 9 = 0$

Пусть $t = \cos 3x, |t| \le 1$, тогда:

$8t^2 - t - 9 = 0$

$t_{1;2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+288}}{16} = \dfrac{1 \pm 17}{16} = \left\{-1; \dfrac{9}{8}\right\}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \dfrac{9}{8} \end{array}\right. \\ -1 \le t \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow t = -1$ $\cos 3x = -1$

$3x = \pi + 2\pi n, n \in N$

$x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi n}{3}, n \in N.$

</td></tr>
<tr><td>

2) Разложение на множители.

$$a \cdot b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a = 0, \\ b = 0. \end{array}\right.$$

ВАЖНО! Произведение двух выражений равно нулю, если один из множителей равен нулю, а второй при этом не теряет своего смысла! (проверка ОДЗ).

</td><td>

$(tgx - 1)\cdot(\sin x + 1) = 0$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} tgx - 1 = 0, \\ \sin x + 1 = 0, \end{array}\right. \\ x \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} tgx = 1, \\ \sin x = -1, \end{array}\right. \\ x \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z, \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z, \end{array}\right. \\ x \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$

</td></tr>
<tr><td>

3) Однородные уравнения:

а) все одночлены имеют одинаковую степень

б) свободный член равен нулю,

в) в уравнении присутствуют степени триг. функций одного аргумента с двумя различными основаниями.

Например, $a\cos x + b\sin x = 0$ - одн. ур-е 1 степени

$a\cos^2 x + b\cos x \sin x + c\sin^2 x = 0$ - одн. ур-е 2 степени и т.д.

Решение однородных уравнений:

а) проверка: можно ли уравнение разложить на множители;

б) если ДА, то решаем разложением на множители:

$$a \cdot b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a = 0, \\ b = 0. \end{array}\right.$$

в) если НЕТ, то делим обе части уравнения на $\cos\alpha$ в степени уравнения;
(где α – аргумент триг. функций в уравнении)
переходим от двух функций $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ к $tg\alpha$.

Деление на переменную в этом случае НЕ приведёт к потере корня, т.к. $\cos\alpha = 0$ не является корнем ур-я (иначе получим противоречие с ОТТ).

</td><td>

1) $5\cos^2 2x + \sin 2x \cos 2x = 0$ - одн. ур-е 2 ст.

$\cos 2x \cdot (5\cos 2x + \sin 2x) = 0$

$\cos 2x = 0$ или $5\cos 2x + \sin 2x = 0$

$2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ $\quad 5 + tg 2x = 0$

$tg 2x = -5$

$x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}, n \in Z$ $\quad 2x = -arctg 5 + \pi k, k \in Z$

$x = -\dfrac{1}{2} arctg 5 + \dfrac{\pi k}{2}, k \in Z.$

2) $3\sin^2 \dfrac{x}{2} + \sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} - 2\cos^2\dfrac{x}{2} = 0$ / делим обе части уравнения на $\cos^2\dfrac{x}{2}$, т.к. $\cos\dfrac{x}{2} = 0$ не является корнем уравнения.

$3tg^2\dfrac{x}{2} + tg\dfrac{x}{2} - 2 = 0$ Пусть $t = tg\dfrac{x}{2}$, тогда:

$3t^2 + t - 2 = 0$ $\quad t_{1;2} = \dfrac{-1 \pm 5}{6} = \left\{-1; \dfrac{2}{3}\right\}$

$tg\dfrac{x}{2} = -1$ $\quad tg\dfrac{x}{2} = \dfrac{2}{3}$

$\dfrac{x}{2} = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$ $\quad \dfrac{x}{2} = arctg\dfrac{2}{3} + \pi k, k \in Z$

$x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$ $\quad x = 2arctg\dfrac{2}{3} + 2\pi k, k \in Z.$

</td></tr>
</table>

3а) Решение неоднородных уравнений второй степени вида

$a\cos^2 x + b\cos x \sin x + c\sin^2 x = n$, где $n \neq 0$

Такое уравнение можно привести к однородному путём умножения на тригонометрическую единицу:

$$1 = cos^2 x + \sin^2 x$$

3) $4\sin^2 x - 2\sin x\cos x = 3$

$$4\sin^2 x - 2\sin x\cos x = 3\cdot(cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$4\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 3cos^2 x - 3\sin^2 x = 0$$

$$\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 3cos^2 x = 0$$

$tg^2 x - 2tgx - 3 = 0$ Пусть $t = tgx$, тогда:

$t^2 - 2t - 3 = 0$ $\quad t_{1;2} = 1 \pm 2 = \{-1;\, 3\}$

$tgx = -1$ или $tgx = 3$

$\underline{x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z}$ $\quad \underline{x = arctg3 + \pi k,\ k \in Z.}$

4) Метод вспомогательного аргумента.

Этим методом решаются уравнения вида:

$a\cos x + b\sin x = c$, где $a, b, c \neq 0$

Обе части уравнения надо разделить на $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Получим: $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Пусть $\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = c'$.

Т.к. $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, то эти коэффициенты можно заменить на косинус и синус вспомогательного аргумента α и, применив формулы $\cos(\alpha \pm \beta)$ или $\sin(\alpha \pm \beta)$, свести уравнение к простейшему, например:

$$cos\alpha \cdot \cos x + \sin\alpha \cdot \sin x = c'$$

$$cos(x - \alpha) = c'$$

$\sqrt{3}\sin 3x - \cos 3x = 1 \quad / \div 2 \qquad \sqrt{3+1} = 2$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x - \frac{1}{2}\cos 3x = \frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin 3x - \sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos 3x = \frac{1}{2}$$

$$\sin(3x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} 3x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z, \\ 3x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z, \\ 3x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z, \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in Z, \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3},\ k \in Z. \end{array}\right.}$$

5) Метод оценки.

Некоторые нестандартные триг. уравнения можно решить, оценивая значения левой и правой частей уравнения.
При этом используется ограниченность функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$.

$\sin 3x - 2\cos 18x = 3$

Удобно сразу ввести замену для уменьшения аргумента:

пусть $t = 3x$, тогда: $\sin t - 2\cos 6t = 3$

т.к. $-1 \le \sin t \le 1$ (1) $\quad -1 \le \cos 6t \le 1$

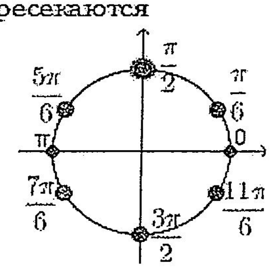
$-2 \le -2\cos 6t \le 2$ (2)

Сложим неравенства (1) и (2): $-3 \le \sin t - 2\cos 6t \le 3$

Тогда уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \sin t = 1, \\ \cos 6t = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z, \\ 6t = \pi + 2\pi k,\ k \in Z; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z, \\ t = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3},\ k \in Z; \end{cases}$$

Пересечение корней можно найти на окружности. Для этого отметим корни 1-го уравнения красным цветом, а 2-ого – зелёным. На рисунке видно, что решения уравнений пересекаются в точке $\frac{\pi}{2}$ и $\Rightarrow$ решением системы является серия $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.



Вернёмся к переменной x: $3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$

$$\underline{x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in Z.}$$